
TD de Résolution de Problèmes Combinatoires

Objectif de la session et rappels

En CP (*Constraint Programming*), les problèmes sont modélisés sous la forme de CSP (*Constraint Satisfaction Problem*). Un CSP est représenté par un triplet (X, D, C) où :

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble de variables ;
- D est la fonction qui associe à chaque variable x_i son domaine $D(x_i)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre x_i ;
- $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ est l'ensemble de contraintes du problème. Une contrainte c_k est une relation, portant sur certaines variables de X , indiquant quelles valeurs peuvent prendre simultanément ces variables.

L'objectif de ce TD est de vous entraîner à modéliser des problèmes sous la forme de CSP en identifiant X , c'est à dire les variables intervenant dans le modèle et D leur domaine de valeur, ainsi que C l'ensemble des contraintes entre ces variables.

Exercice 1

On s'intéresse à un distributeur automatique de boisson. L'utilisateur insère des pièces de monnaie pour un total de T centimes d'Euros, puis il sélectionne une boisson, dont le prix est de P centimes d'Euros (T et P étant des multiples de 10). Il s'agit alors de calculer la monnaie à rendre, sachant que le distributeur a en réserve E_2 pièces de 2€, E_1 pièces de 1€, C_{50} pièces de 50 centimes, C_{20} pièces de 20 centimes et C_{10} pièces de 10 centimes.

Question 1. Modéliser ce problème sous la forme d'un CSP.

Question 2. Comment pourrait-on exprimer le fait que l'on souhaite que le distributeur rende le moins de pièces possibles ?

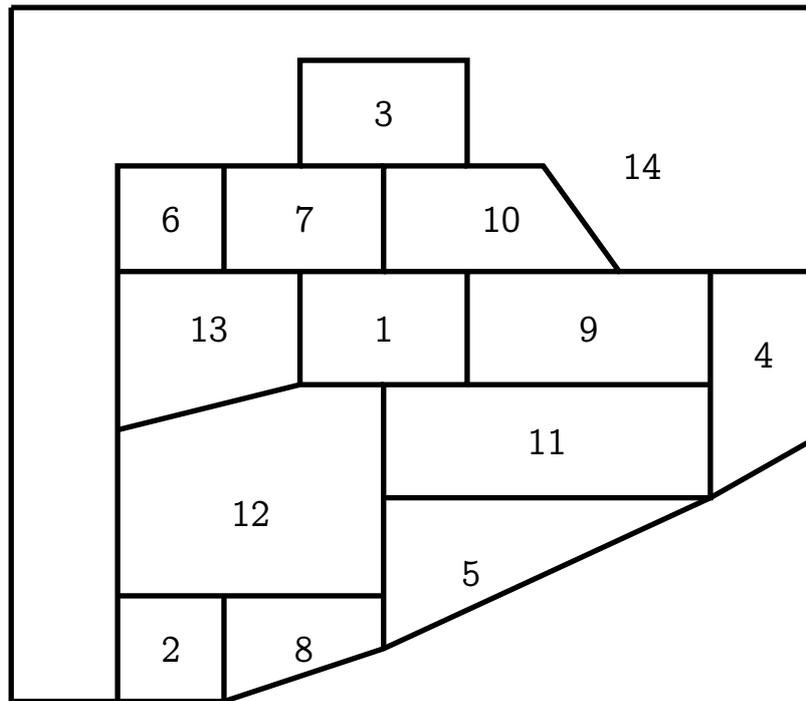


Fig. 1. – La carte à modéliser.

Exercice 2

Il s'agit ici de colorier les 14 régions de la carte (voir Fig. 1), de sorte que deux régions ayant une frontière en commun soient coloriées avec des couleurs différentes. On dispose pour cela des 4 couleurs suivantes : bleu, rouge, jaune, vert.

Question 3. Modéliser ce problème sous la forme d'un CSP.

Exercice 3

Dans le cadre de l'assignation de tâches au sein d'un projet, un manager, qui souhaite garder l'anonymat de son entreprise, souhaite répartir différentes tâches d'un vaste projet de façon à maximiser l'efficacité et le bien-être de ses « salariés ». Pour cela il dispose de deux informations ;

- la préférence des « salariés » vis à vis des tâches qui sont associées (voir Tableau 1) ;
- l'efficacité de chacun des « salariés » pour une tâche donnée (voir Tableau 2).

Les tâches sont secrètes et sont numérotées de 1 à 6.

💡 Conseil

Ce problème repose sur le **problème des mariages « stables »**. Pour un couple (i, j) , un mariage est considéré comme stable s'il n'existe pas de couple (i', j') , tel que i préfère j' à j et j' préfère i à i' .

Question 4. Modéliser ce problème sous la forme d'un CSP.

- Anna préfère 2, puis (6 et 4 ex aequo) ;
- Bohort préfère (2 et 5 ex aequo), puis 6 ;
- Cryda préfère 1, puis 3, puis 6 ;
- Dagonet préfère 6, puis 3 ;
- Élias préfère 2, puis 1, puis 5 ;
- Ferghus préfère 6, puis (4 et 2 ex aequo), puis 5, puis 1.

Tableau 1. – Classement des « salariés »

- La tâche 1 est mieux réalisée par (Élias et Cryda ex aequo), puis Ferghus ;
- La tâche 2 est mieux réalisée par Bohort, puis Élias, puis Anna, puis Ferghus ;
- La tâche 3 est mieux réalisée par (Cryda et Dagonet ex aequo) ;
- La tâche 4 est mieux réalisée par Ferghus, puis Anna ;
- La tâche 5 est mieux réalisée par Élias, puis Bohort, puis Ferghus ;
- La tâche 6 est mieux réalisée par Anna, puis (Dagonet et Ferghus ex aequo), puis Bohort, puis Cryda.

Tableau 2. – Efficacité des « salariés » pour une tâche donnée

Exercice 4

Aujourd'hui Loïc¹ décide corriger les sujets de RPC, mais comme il n'aime pas ça et qu'« il n'a pas que ça à faire, lui », il vous demande d'optimiser son parcours de correction. Pour vous aider, il a tout de même listé les différentes actions à effectuer :

- (a) négocier avec l'autre Loïc pour essayer de lui faire corriger plus d'exercices, ce qui prend 30 minutes ;
- (b) créer une ressource Gradescope sur Moodle pour gérer les corrections de copies, ce qui prend 10 minutes ;
- (c) récupérer la liste des étudiants sur Moodle, ce qui prend 10 minutes ;
- (d) mettre le coefficient de l'évaluation sur Moodle, ce qui prend 10 minutes ;
- (e) envoyer le sujet du devoir sur la ressource Gradescope, ce qui prend 10 minutes ;
- (f) sur Gradescope, identifier les différentes zones de réponses du sujet, ce qui prend 10 minutes ;
- (g) scanner les copies des étudiants et les mettre sur Gradescope, ce qui prend 45 minutes. Cette opération ne peut être réalisée qu'une fois l'identification des zones de réponses réalisée ;
- (h) après la négociation avec l'autre Loïc, établir la grille critériée des exercices qu'il corrige (lui, pas l'autre), ce qui prend 45 minutes ;
- (i) après la négociation, l'autre Loïc aura certainement besoin de 1 heure 30 minutes pour faire sa grille critériée ;

¹Toute ressemblance avec des personnages existants serait purement fortuite.

- (j) une fois que les copies sont scannées et que les zones de réponses sont définies, il faut assigner les copies aux différents étudiants à l'aide de la liste d'identifiants, cette étape prend 45 minutes, étant donné que l'OCR ne reconnaît pas les hiéroglyphes antiques ;
- (k) une fois que l'assignation des copies est faite, Loïc doit corriger ses exercices à l'aide de sa grille critériée, ce qui lui prend 2 heures ;
- (l) l'autre Loïc fait de même, ce qui lui prend 4 heures ;
- (m) une fois que les corrections sont finalisées, il faut vérifier que Moodle est bien à jour et que la moyenne correspond au coefficient enregistré, ce qui prend 30 minutes.

Comme Loïc est extrêmement multi-tâches et que de toutes façons presque toutes les durées sont du temps d'attente, il considère que le nombre de tâches qu'il peut faire en même temps est illimité. En revanche, il n'est pas un champion de logistique, et fait donc appel à vous pour déterminer l'heure h (au plus tard) où il devra commencer à préparer la correction, sachant que Baptiste² lui a conseillé dit qu'il devait finir avant 23h42.

Question 5. Modéliser ce problème sous la forme d'un COP (*Constrained Optimization Problem*).

Question 6. À l'aide de la bibliothèque de votre choix, résolvez le problème.

Question 7. Ce problème est-il *NP*-difficile ? Existe-il d'autres moyens de le résoudre ?

²Pareil que pour ¹.